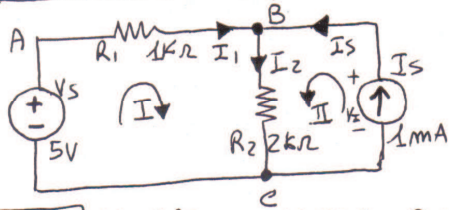


ESERCITAZIONI DI ELETTROTECNICA . 2010. ING. GERARDI

**ESERCIZIO:** verificare le KCL, KVL e il Bilancio delle potenze.



Sono anche note le correnti nei rami:

$$I_1 = 1 \text{ mA} ; I_2 = 2 \text{ mA}$$

**SOL.** Verifica KCL: al nodo B (al nodo C è la stessa equazione ma con i segni invertiti perché ci sono  $M-1=1$  modo indipendente):  
KCL nodo B:  $-I_1 + I_2 - I_S = 0$  infatti  $-1 + 2 - 1 = 0$  OK

Verifica KVL: alle due MAGLIE I e II:

KVL maglia I:  $+V_A + V_{AB} + V_{BC} = 0 \Rightarrow -V_S + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0 \Rightarrow -5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 0$  OK

KVL maglia II:  $-V_I + V_{BC} = 0 \Rightarrow V_I = V_{BC} = R_2 \cdot I_2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ V}$

Verifica del Bilancio delle Potenze: Seguendo la "convenzione degli UTILIZZATORI"

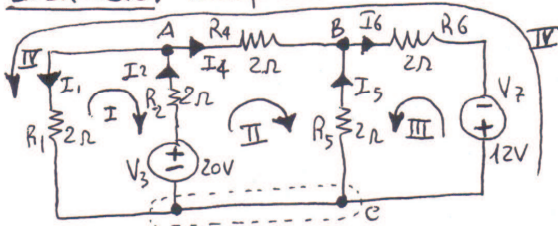
$-P_{\text{generatori}} + P_{\text{utilizzatori}} = 0 \Rightarrow$  si analizza il "comportamento" dei generatori.

$V_S$  si comporta da "GENERATORE" perché la corrente ( $I_1 > 0$ ) esce dal morsetto +;

$I_S$  " " " " perché " " ( $I_S > 0$ ) " " " " ( $V_{BC} > 0$ );

$$-[(V_S \cdot I_1) + (V_I \cdot I_S)] + [(R_1 \cdot I_1^2) + (R_2 \cdot I_2^2)] = 0 \Rightarrow -[5 + 4] + [1 + 8] = 0$$
 OK

**ESERCIZIO:** verificare le KCL, KVL e il Bilancio delle potenze.



Sono anche note le correnti nei rami:

$$I_1 = 3 \text{ A} ; I_2 = 7 \text{ A}$$

$$I_4 = 4 \text{ A} ; I_5 = 1 \text{ A}$$

$$I_6 = 5 \text{ A}$$

**SOL.** Verifica KCL: (ci sono solo  $M-1=2$  modi indipendenti: p.e. A e B).

nodo A:  $+I_1 - I_2 + I_4 = 0 \Rightarrow +3 - 7 + 4 = 0$  OK

nodo B:  $-I_4 - I_5 + I_6 = 0 \Rightarrow -4 - 1 + 5 = 0$  OK

Verifica KVL: alle 4 maglie I, II, III e IV:

KVL maglia I:  $-R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 + V_3 = 0 \Rightarrow -6 - 14 + 20 = 0$  OK

KVL maglia II:  $-V_3 + R_2 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 = 0 \Rightarrow -20 + 14 + 8 - 2 = 0$  OK

KVL maglia III:  $+V_7 - R_6 \cdot I_6 - R_5 \cdot I_5 = 0 \Rightarrow +12 - 10 - 2 = 0$  OK

KVL maglia IV:  $+V_7 - R_6 \cdot I_6 - R_4 \cdot I_4 + R_1 \cdot I_1 = 0 \Rightarrow +12 - 10 - 8 + 6 = 0$  OK

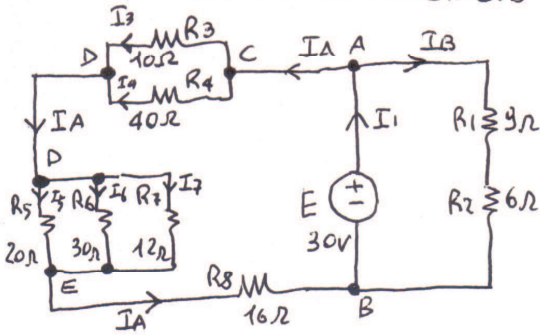
Verifica del Bilancio delle Potenze: Seguendo la "convenzione degli UTILIZZATORI"

$-P_{\text{gen.}} + P_{\text{util.}} = 0 \Rightarrow$  Entrambi i due generatori di tensione erogano corrente, cioè la I esce dal morsetto positivo.

$$-[(V_3 \cdot I_2) + (V_7 \cdot I_6)] + [R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_6^2] = 0$$

$$-[(20 \cdot 7) + (12 \cdot 5)] + [2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 5^2] = -[140 + 60] + [18 + 98 + 32 + 2 + 50] = 0$$
 OK

ESERCIZIO: Calcolare tutte le TENSIONI e le correnti. Verificare le KCL, KVL e il Bilancio delle Potenze.



Si calcolano le resistenze equivalenti:

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 9 + 6 = 15\Omega$$

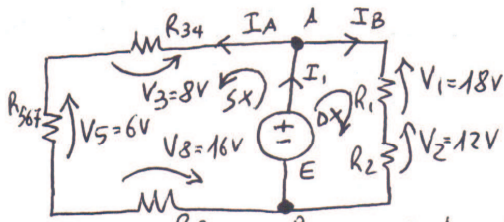
$$R_{34} = R_3 // R_4 = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8\Omega$$

$$R_{567} = \left( \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} \right) // 12 = \frac{12 \cdot 12}{12 + 12} = 6\Omega \quad (R_{56} = R_5 // R_6 = 12\Omega)$$

$$R_{eq} = R_{12} // (R_{34} + R_{567} + R_8) = \frac{15 \cdot 30}{15 + 30} = 10\Omega$$

Si calcola la corrente I1:

$$I_1 = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{30}{10} = 3A$$



Dal circuito si ricavano le tensioni con il PARTITORE DI TENSIONE applicato a SX e DX

$$V_1 = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 30 \cdot \frac{9}{9 + 6} = 18V; \quad V_2 = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 30 \cdot \frac{6}{9 + 6} = 12V$$

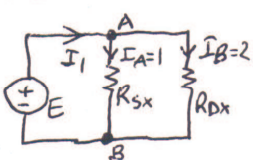
$$V_3 = E \cdot \frac{R_{34}}{R_{34} + R_{567} + R_8} = 30 \cdot \frac{8}{30} = 8V; \quad V_5 = E \cdot \frac{R_{567}}{\Sigma R} = 30 \cdot \frac{6}{30} = 6V; \quad V_8 = E \cdot \frac{R_8}{\Sigma R} = 30 \cdot \frac{16}{30} = 16V$$

Riportando sul circuito le tensioni calcolate è FACILE verificare la 2KVL e SX e DX con versi rispettivamente ANTIORARIO e ORARIO:

$$\sqrt{SX} - E + V_3 + V_5 + V_8 = 0 \Rightarrow -30 + 8 + 6 + 16 = 0 \quad OK$$

$$\sqrt{DX} - E + V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow -30 + 18 + 12 = 0 \quad OK$$

Dal valore calcolato di I1 si calcolano IA e IB con il PARTITORE DI CORRENTE:



$$R_{SX} = R_{34} + R_{567} + R_8 = 30\Omega; \quad R_{DX} = R_{12} = 15\Omega$$

$$I_A = I_1 \cdot \frac{R_{DX}}{R_{DX} + R_{SX}} = 3 \cdot \frac{15}{15 + 30} = 1A$$

$$I_B = I_1 \cdot \frac{R_{SX}}{R_{DX} + R_{SX}} = 3 \cdot \frac{30}{15 + 30} = 2A$$

È facile verificare le KCL al nodo A:

$$I_A + I_B - I_1 = 0; \quad 1 + 2 - 3 = 0 \quad OK$$

La corrente IB è la corrente su R1 e R2, mentre IA è la corrente su R8.

Le correnti su R3, R4 e su R5, R6, R7 si calcolano ancora con il PARTITORE DI CORRENTE

$$I_3 = I_A \cdot \frac{R_4}{R_{34}} = 0,8A; \quad I_4 = I_A \cdot \frac{R_3}{R_{34}} = 0,2A \Rightarrow \text{verifico KCL nodo C: } I_3 + I_4 - I_A = 0 \quad OK$$

$$I_7 = I_A \cdot \frac{R_7}{R_7 + R_6} = 0,5A$$

$$I_{56} = 0,5A$$



$$I_5 = I_{56} \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6} = 0,3A$$

$$I_6 = 0,2A$$

$$\text{verifico KCL nodo D} \\ I_5 + I_6 + I_7 - I_A = 0 \\ 0,3 + 0,2 + 0,5 - 1 = 0 \quad OK$$

Verifica BILANCIO delle POTENZE:

$$-P_{gen.} + P_{utilizz.} = 0$$

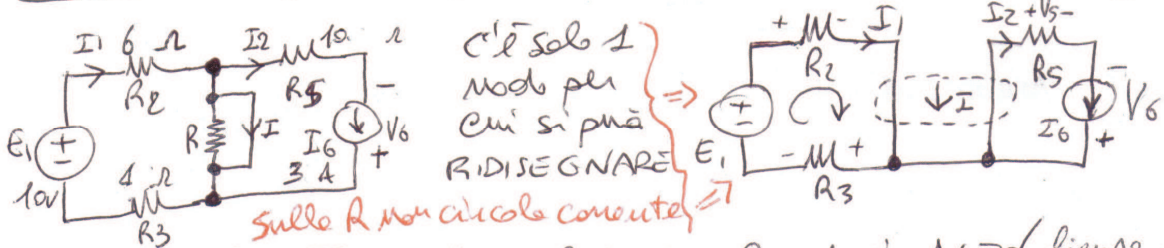
$$-(E \cdot I_1) + [(R_1 \cdot I_B^2) + (R_2 \cdot I_B^2) + (R_3 \cdot I_3^2) + (R_4 \cdot I_4^2) + (R_5 \cdot I_5^2) + (R_6 \cdot I_6^2) + (R_7 \cdot I_7^2) + (R_8 \cdot I_A^2)] = 0$$

$$-90 + [36 + 24 + 6,4 + 1,6 + 1,8 + 1,2 + 3 + 16] = 0$$

$$-90 + 90 = 0 \quad OK$$



ESERCIZIO: (Calc. I) [su cortocircuito KVL KCL Bilancio Potenze]



c'è solo 1 modo per cui si può RIDISEGNARE

Per calcolo  $I$  si applica la KCL al nodo in Δ (TD) (figura a sx)

$I = I_1 - I_2$  Occorre le correnti  $I_1$ , mentre  $I_2 = I_6$

La corrente  $I_1$  si calcola dalle figure a Dx, applicando KVL

$-E + R_2 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{E}{R_T} = \frac{10}{10} = 1A$  ( $R_T = R_2 + R_3$  SERIE)

quindi  $I = I_1 - I_2 = 1 - 3 = -2A \Rightarrow$  NON È SBAGLIATO IL RISULT. è solo invertito il segno.

Per il Bilancio delle potenze si studia il comportamento del 'GENE.'

$E_1$  eroga corrente dal + quindi è un GENERATORE; per  $I_6$  si calcola  $V_6$  dalla KVL alla maglia a Dx del circuito e Dx:  $V_6 = +V_5 = +R_5 \cdot I_2 = 30V$  per cui anche  $I_6$  è un generatore perché la corrente ESCE dal morsetto +;

$-P_{gen.} + P_{utl.} = 0 \Rightarrow -(E_1 \cdot I_1) - (V_6 \cdot I_6) + R_2 I_1^2 + R_3 I_1^2 + R_5 I_2^2 = 0$

$-100 - 90 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 10 \cdot 9 = 0 \Rightarrow -100 + 100 = 0 \quad OK$

Cosa succede se si ottiene il valore di  $R_2$  da 6 a 1 e di  $R_3$  da 4 a 1? oppure se si moltiplica  $\times 5 E_1$  ( $E_1 = 50V$ )?

Cambia la  $I_1$  ma non cambia  $I_2$  perché imposta dal gene-

Cambia la potenza del gene. e sx e delle  $R_2$  e  $R_3$  (sx)

ma non cambia la potenza a Dx (sib gene., sib  $R_5$ )

Per cui si può affermare che il CORTOCIRCUITO

SEPARA i due circuiti cioè li rende

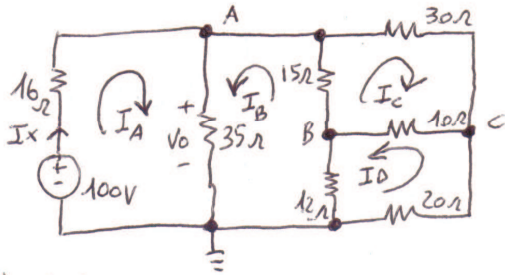
INDIPENDENTI: per cui si potrebbero applicare

due 2 Bilanci di potenze indipendenti (sx e Dx)

Ma anche la  $I$  cambia:  $I = \frac{E_1}{R_2 + R_3} - I_2 = 5 - 3 = +2A$

per cui stavolta il verso SCELTO È CORRETTO - □

ESERCIZIO: Calcolare  $V_0$  con l'ANALISI NODALE e l'ANALISI AGLI ANELLI.



1) ANALISI NODALE: Si scrivono  $M-1=3$  equazioni KCL e una equazione di vincolo sul gene. di tensione.

$$\text{KCL nodo A : } -I_x + \frac{E_A}{35} + \frac{E_A - E_B}{15} + \frac{E_A - E_C}{30} = 0$$

$$\text{KCL nodo B : } \frac{E_B - E_A}{15} + \frac{E_B - E_C}{10} + \frac{E_B}{12} = 0$$

$$\text{KCL nodo C : } \frac{E_C - E_A}{30} + \frac{E_C - E_B}{10} + \frac{E_C}{20} = 0$$

$$\text{Vincolo gen 100V: } I_x = \frac{100 - E_A}{16}$$

$$\begin{cases} -10500 + 105 \cdot E_A + 48 \cdot E_A + 112 \cdot E_A - 112 \cdot E_B + 56 \cdot E_A - 56 \cdot E_C = 0 \\ 4 \cdot E_B - 4 \cdot E_A + 6 \cdot E_B - 6 \cdot E_C + 5 \cdot E_B = 0 \\ 2 \cdot E_C - 2 \cdot E_A + 6 \cdot E_C - 6 \cdot E_B + 3 \cdot E_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22 \cdot E_A - 112 \cdot E_B - 56 \cdot E_C = 10500 \\ -4 \cdot E_A + 15 \cdot E_B - 6 \cdot E_C = 0 \\ -2 \cdot E_A - 6 \cdot E_B + 11 \cdot E_C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{SOLUZIONI} \begin{cases} E_A = 42,18 \text{ V} \equiv V_0 \\ E_B = 18,31 \text{ V} \\ E_C = 17,66 \text{ V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22 \cdot E_A - 112 \cdot E_B - 56 \cdot E_C = 10500 \\ -4 \cdot E_A + 15 \cdot E_B - 6 \cdot E_C = 0 \\ -2 \cdot E_A - 6 \cdot E_B + 11 \cdot E_C = 0 \end{cases}$$

2) ANALISI AGLI ANELLI: si scrivono  $l = b - (M-1) = 4$  equazioni KVL.

$$\text{KVL maglia } \overline{IA}: -100 + (16+35) \cdot I_A + 35 \cdot I_B = 0$$

$$\text{KVL maglia } \overline{IB}: (12+15+35) \cdot I_B + 35 \cdot I_A + 15 \cdot I_C - 12 \cdot I_D = 0$$

$$\text{KVL maglia } \overline{IC}: (15+30+10) \cdot I_C + 15 \cdot I_B + 10 \cdot I_D = 0$$

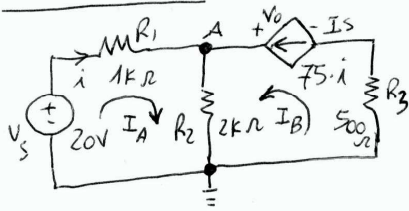
$$\text{KVL maglia } \overline{ID}: (20+10+12) \cdot I_D + 10 \cdot I_C - 12 \cdot I_B = 0$$

$$\begin{cases} 51 \cdot I_A + 35 \cdot I_B = 100 \\ 35 \cdot I_A + 62 \cdot I_B + 15 \cdot I_C - 12 \cdot I_D = 0 \\ 15 \cdot I_B + 55 \cdot I_C + 10 \cdot I_D = 0 \\ -12 \cdot I_B + 10 \cdot I_C + 42 \cdot I_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{SOL.} \begin{cases} I_A = 3,614 \text{ A} \\ I_B = -2,409 \text{ A} \\ I_C = 0,817 \text{ A} \\ I_D = -0,883 \text{ A} \end{cases}$$

$$V_0 = 35 \cdot (I_A + I_B) = 35 \cdot 1,205 = 42,175 \text{ V OK}$$



ESERCIZIO: Calcolare la corrente "i".



Si risolve con i seguenti metodi:

- Analisi NODALE.
- Analisi agli ANELLI.
- Teorema di THEVENIN.
- Teorema di NORTON.

1) ANALISI NODALE: Si scrive  $M-1=1$  equazione KCL e 1 equazione di vincolo su  $V_s$  ( $I_{in}$  [mA] e  $R_{in}$  [kΩ]).

$$\text{KCL nodo A: } -i + \frac{EA}{R_2} - I_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{20-EA}{1} + \frac{EA}{2} - 75\left(\frac{20-EA}{1}\right) = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\text{Vincolo su } V_s: i = \frac{V_s - EA}{R_1}$$

$$2EA - 40 + EA - 3000 + 150 \cdot EA = 0 \Rightarrow EA = 19,87 \text{ V} \Rightarrow i = \frac{20 - 19,87}{1} = 0,13 \text{ mA}$$

2) ANALISI AGLI ANELLI: Si scriviamo  $l = b - (m - 1) = 2$  equazioni KVL e 1 equazione di vincolo su  $I_s$ .

La seconda eq. KVL alla maglia  $I_B$  serve solo a calcolare  $V_0$  non si usa.

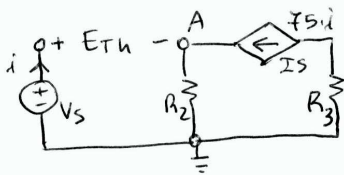
$$\text{KVL maglia } (I_A): -20 + (R_1 + R_2) \cdot I_A + R_2 \cdot I_B = 0$$

$$\text{Vincolo gen. } I_s: I_s = I_B = 75 \cdot i = 75 \cdot I_A \text{ (perch\u00e9 } i \equiv I_A)$$

$$-20 + 3 \cdot I_A + 150 \cdot I_A = 0 \Rightarrow I_A = \frac{20}{153} = 0,13 \text{ mA} \equiv i \quad \text{OK}$$

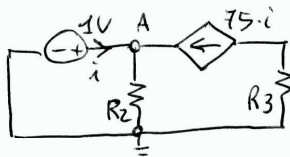
3) TEOREMA DI THEVENIN: Si determinano  $E_{Th}$  e  $R_{Th}$  e poi si sostituiscono nel CIRCUITO EQUIVALENTE DI THEVENIN, quindi si calcola la corrente "i". Come prima cosa si "TAGLIA"  $R_1$ .

o CALCOLO  $E_{Th}$ : \u00e8 la tensione a vuoto, cioè senza  $R_1$ .



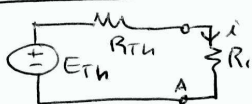
Siccome il ramo di  $R_1$  \u00e8 aperto, la corrente  $i$  \u00e8 NULLA, e lo \u00e8 pure il generatore controllato, per cui  $E_{Th} \equiv V_s = 20 \text{ V}$ .

o CALCOLO  $R_{Th}$ : \u00e8 la resistenza tra i terminali tra i quali si \u00e8 effettuato il "taglio", dopo aver PASSIVIZZATO ( $V_s$  in CORTOCIRCUITO). Visto che c'\u00e8 un generatore controllato, si inserisce un gen. di tensione da 1V e si calcola la corrente e quindi  $R_{Th}$ :



$$\text{Si noti che } EA = VR_2 = 1 \text{ V} \text{ - Con l'analisi NODALE: } \frac{EA}{2} - i - 75i = 0 \Rightarrow i = \frac{EA/2}{76} = \frac{1}{152} \text{ [mA]} \Rightarrow R_{Th} = \frac{1 \text{ V}}{i} = 152 \text{ k}\Omega$$

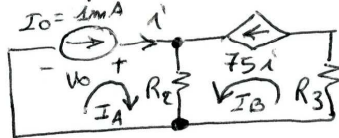
o CIRCUITO EQUIVALENTE DI THEVENIN:



$$i = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_1} = \frac{20}{153} = 0,13 \text{ mA} \quad \text{OK}$$

4) TEOREMA DI NORTON: si determina  $I_{NO}$  e  $R_{NO}$  e poi del circuito equivalente di NORTON si ricava la corrente "i".

• Calcolo  $R_{NO}$ : tale resistenza si calcola nello stesso modo delle resistenze equivalenti di THVENIN, per cui il suo valore è pari a:  $R_{NO} = R_{TH} = 152 \text{ k}\Omega$ . Ma, a titolo di verifica del risultato, si inserisce un generatore di corrente da  $1 \text{ mA} = I_0$  e dopo aver calcolato la tensione ai suoi capi ( $V_0$ ), si calcola  $R_{NO} = \frac{V_0}{I_0}$



con l'analisi agli ANELLI, si ricorre:

$$I_A = I_0 = 1 \text{ mA}$$

$$I_B = 75 \cdot i = 75 \cdot I_0 = 75 \text{ mA}$$

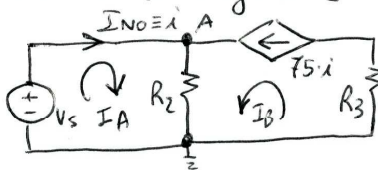
La tensione del generatore da  $1 \text{ mA}$ ,  $V_0$ , coincide con  $V_{R2}$  e si ottiene dalle correnti di anello:

$$V_0 = V_{R2} = R_2 \cdot (I_A + I_B) = 2 \cdot 76 = 152 \text{ V}$$

La resistenza equivalente di NORTON vale:

$$R_{NO} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{152}{1 \cdot 10^{-3}} = 152 \text{ k}\Omega \text{ (ok)}$$

• Calcolo  $I_{NO}$ : è la corrente di CORTOCIRCUITO tra i punti in cui si è "tagliate"  $R_1$ , cioè



si risolve sempre con l'analisi agli ANELLI:

$$I_A = I_{NO} = i$$

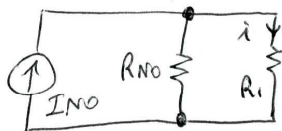
$$I_B = 75 \cdot i = 75 \cdot I_A$$

$$V_{R2} = V_s = 20 \text{ V} = R_2 \cdot (I_A + I_B)$$

$$20 = 2 \cdot 76 \cdot I_{NO}$$

$$\Rightarrow I_{NO} = \frac{20}{152} = 0,13 \text{ mA}$$

• Circuito equivalente di NORTON:



Con il PARTITORE DI CORRENTE si ricava la corrente "i".

$$i = I_{NO} \cdot \frac{R_{NO}}{R_{NO} + R_L} = 0,13 \cdot \frac{152}{153} = 0,13 \text{ mA}$$

Questo risultato evidenzia che la corrente  $I_{NO}$  scade, quasi tutta nella resistenza  $R_L$  che (rispetto a  $R_{NO}$ ), rappresenta un vero e proprio CORTOCIRCUITO.